Corrigé

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. On a
$$M^2 + 8M + 6I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $M^2 + 8M + 6I_3 = M^3$, alors $6I_3 = M^3 - M^2 - 8M$ d'où :
$$I_3 = \tfrac{1}{6}(M^3 - M^2 - 8M) = \tfrac{1}{6}(M(M^2 - M - 8I_3)) = M \times \tfrac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3).$$
Comme $M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3) = I_3$, on en déduit que M est inversible et que
$$M^{-1} = \tfrac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. Comme la parabole passe par les points A, B et C, on a $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ et $f(2) = 5$.

   Or, $f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c$, $f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c$ et $f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b + c$.

   D'où $a + b + c = 1$, $a - b + c = -1$ et $4a + 2b + c = 5$.

   Ainsi, a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ a - b + c & = -1 \\ 4a + 2b + c & = 5 \end{cases}$.

   Le système peut s'écrire $M \times X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Comme M est inversible, le système admet une solution :
$$X = M^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

   Ainsi, $f(x) = x^2 + x - 1$.